Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 19** (presencial)

TP4D-1: 5ª feira, 20/05, 14h ; TP4D-2: 5ª feira, 20/05, 16h ; TP4D-3: 6ª feira, 21/05, 11h ; TP4D-4: 4ª feira, 19/05, 10h30 ; TP4D-5: 6ª feira, 21/05, 14h

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula consolidar a matéria estudando as páginas 51 a 65 dos apontamentos teóricos e resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Nota: Resolver antes da aula os integrais da pág. 5 desta planificação

Slides 1 a 6 (novos slides) Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Equações que estabelecem uma relação entre a variável independente, a função desconhecida e as suas derivadas.

Nota: Esta matéria é das mais usadas na resolução de imensos problemas de engenharia e de ciências ⇝ ver exemplos das pág. 51 a 54 dos apontamentos

Notação: $y^{(k)}$ ou $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ ⇝ derivada de ordem k de y em ordem a x

Definição: Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

ou, equivalentemente, $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$

onde: x ⇝ variável independente
$y \equiv y(x)$ ⇝ função desconhecida que depende de x

Exemplos: a) $xy' + y = 0$ ⇝ EDO de ordem 1

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 \operatorname{sen}(x) - 2xy'$ ⇝ EDO de ordem 2

c) $(y')^2 + y = \cos x$ ⇝ EDO de ordem 1

Definição: Dizemos que uma EDO está na forma normal quando está escrita na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Exemplo: Das 3 EDO anteriores, apenas a da alínea b) está escrita na forma normal.

Slides 7 a 9 **Solução de uma EDO**

Definição: Chama-se **solução da EDO** $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ com derivadas finitas até à ordem n tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \ , \ \forall x \in I$$

Exercício 1: Mostre que $\varphi(x) = \text{sen}(2x)$ é uma solução da EDO $y'' + 4y = 0$.

Terminologia associada a uma EDO de ordem n

- **Integral geral:** família de soluções obtidas por técnicas de integração adequadas, dependente de n constantes arbitrárias
- **Solução particular:** solução obtida do integral geral por concretização das constantes arbitrárias.
- **Solução singular:** solução da EDO que não se obtém do integral geral.
- **Solução geral:** conjunto de todas as soluções de uma EDO.

Notas:
- Uma EDO do tipo $y' = f(x)$, $x \in I$, tem solução geral $y = \int f(x)dx + c$, $c \in \mathbb{R}$ $(x \in I)$
- A EDO $y^{(n)} = f(x)$ resolve-se por n integrações sucessivas.

Exercício 2: Determine a solução geral da EDO $y'' - \cos x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3: Considere a EDO $(y')^2 - 4y = 0$.

a) Verifique que $y = (x+c)^2$ é solução da EDO, $\forall c \in \mathbb{R}$.

b) Verifique que $y = x^2$ é uma solução particular da EDO. Indique outra.

c) Mostre que $y = 0$ é solução da EDO. Como se classifica essa solução?

Exercício 4: Determinar a EDO correspondente à solução $y = c_1 x^3 + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercício 5: Determinar a EDO correspondente à solução $y = \ln(x^2 + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Slides 10 a 12

Problemas de Valores Iniciais (PVI)
(ou Problemas de Cauchy)

Definição: Chama-se **problema de valores iniciais** (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma EDO de ordem n satisfazendo n condições dadas (ditas condições iniciais) num mesmo ponto x_0:

$$\begin{cases} F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \ , \quad y'(x_0) = y_1 \ , \ \dots \ , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad , \ x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Notas:
- Nem todo o PVI tem solução $\rightarrow$ ver ex. 4.11 da pág 61 dos apontamentos
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única $\rightarrow$ ex. 4.10, pág 61

Exercício 6: Determine a solução do seguinte PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Problema de valores fronteiros $\rightarrow$ ver definição e exemplo no slide 12

Slides 13 a 15

EDOs de Variáveis Separáveis

Definição: A EDO $y' = f(x,y)$ diz-se de **variáveis separáveis** se puder ser escrita na forma

$$\boxed{y' = \frac{p(x)}{q(y)}}$$

$p(x)$ → função que só depende de x
$q(y)$ → " " " " " y

com p e q funções contínuas e $q(y) \neq 0$

Exemplo: $y' = \dfrac{2x}{y}$ é uma EDO de variáveis separáveis com $p(x) = 2x$ e $q(y) = y$.

Nota: Como $y' = \dfrac{dy}{dx}$ temos que

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)} \iff \boxed{q(y)\,dy = p(x)\,dx}$$

Procedimento para resolver uma EDO de variáveis separáveis

- Escrever a EDO na forma $q(y)dy = p(x)dx$
- Integrar ambos os membros da eq. anterior obtendo

$$\boxed{\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx}$$

Exercício 7: Determinar o integral geral da EDO $y' = \frac{2x}{y}$.

Exercício 8: Determinar a solução do PVI $y' = \frac{2x}{y}$ e $y(1) = 0$.

Exercício 9: Determinar o integral geral das EDOs:

a) $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

b) $y' \operatorname{sen}(x) + y \cos x = 0$

c) $y' \times e^{y-x^2} = 2x + xe^y$

Exercício 10: Determinar a solução da EDO $(1-x^2)y' - xy = xy^2$ que satisfaz $y(0) = 0{,}5$.

TPCs: Folha prática 4: 1 até 7

2.º Teste, 19/06/2019 → Ex. 2a)

Ex. Recurso, 08/07/2019 → Ex. 5a)

2.º Teste, 13/06/2018 → Ex. 3a)

Ex. Recurso, 02/07/2018 → Ex. 6a)

1.º Teste, 05/04/2017 → Ex. 4

Ex. Final, 22/06/2017 → Ex. 4a)

Ex. Recurso, 10/07/2017 → Ex. 4a)

Integrais para resolver antes da aula

a) $\int x^2 \cos(x^3)\, dx$

b) $\int \frac{x}{(5+x^2)^7}\, dx$

c) $\int \frac{3}{1+4x^2}\, dx$

d) $\int x^4 \ln x\, dx$ ⇝ por partes

e) $\int \frac{-x+7}{(x-1)(x-2)}$ ⇝ função racional

Soluções

a) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3) + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $-\frac{1}{12(5+x^2)^6} + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x) + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$

e) $2\ln|x-1| - 3\ln|x+2| + c,\ c \in \mathbb{R}$

Integração de funções racionais ⇝ Exercício resolvido

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}\, dx = \int \left(\frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2}\right) dx = 3\ln|x-3| - 2\ln|x-2| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

↳ ver c.aux.

C. aux. • $x^2-5x+6 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

Logo $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$

• $\frac{x}{(x-3)(x-2)} = \underset{\times(x-2)}{\frac{A}{x-3}} + \underset{\times(x-3)}{\frac{B}{x-2}}$

$\Leftrightarrow x = A(x-2) + B(x-3) \Leftrightarrow x = Ax - 2A + Bx - 3B$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B = 1 \\ -2A-3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1-B \\ -2(1-B)-3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \end{cases}$$

Aula 19

1) $y'' + 4y = 0$

Mostrar que $\varphi(x) = \text{sen}(2x)$ é solução.

1º Passo: Derivar $\varphi(x)$ tantas vezes quantas a ordem da EDO.
(neste caso são duas)

$$\varphi'(x) = 2\cos(2x)$$
$$\varphi''(x) = -4\,\text{sen}(2x)$$

2º Passo: Substituir $\varphi(x)$ e as suas derivadas e ver se é solução.

$y'' + 4y = 0 \rightarrow -4\,\text{sen}(2x) + 4 \times \text{sen}(2x) = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

É solução

2) Temos: $\overbrace{y'' - \cos x = 0}^{\text{EDO}}$

Procuremos: solução da EDO

$y'' - \cos x = 0 \Leftrightarrow y'' = \cos x$

Integrando: $y' = \int \cos x \, dx = \text{sen}\, x + c_1, \; c_1 \in \mathbb{R}$

Integrando novamente: $y = \int (\text{sen}\, x + c_1)\, dx = -\cos x + c_1 x + c_2, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Número de constantes igual à ordem da EDO

3) $(y')^2 - 4y = 0$

a) $y = (x+c)^2, \; c \in \mathbb{R}$
(Verificar que é solução)

1º Passo: $y' = ((x+c)^2)' = 2(x+c) \times 1$

2º Passo: $(y')^2 - 4y = 0 \rightarrow (2(x+c))^2 - 4 \times (x+c)^2$

$\Leftrightarrow 4(x+c)^2 - 4(x+c)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

b) $y = (x+c)^2 \xrightarrow{c=0} y = x^2$ ✓

Outra solução particular: $y = (x+3)^2$

c) $y = 0$ é solução?
$y' = 0$

$(y')^2 - 4y = 0 \rightarrow 0^2 - 4 \times 0 = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

$y = 0$ é uma solução singular da EDO, pois não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $(x+c)^2 = 0$

4) Temos: Solução da EDO $\rightarrow y = c_1 x^3 + c_2, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Queremos: EDO

1º Passo: Derivar y tantas vezes quantas o número de constantes (neste caso são duas)

$$y' = 3c_1 x^2 \ ; \ y'' = 6 c_1 x$$

2º Passo: Encontrar uma expressão com derivadas, mas sem constantes arbitrárias

Normalmente, isola-se a constante numa equação e substitui-se nas outras

$$y' = 3c_1 x^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{y'}{3x^2} = c_1}$$

$$y'' = 6c_1 x \Leftrightarrow y'' = 6 \times \frac{y'}{3\cancel{x^2}} \times \cancel{x} \Leftrightarrow y'' = \frac{2y'}{x} \Leftrightarrow \boxed{y''x = 2y'}$$ EDO pedida

5) Temos: Solução da EDO: $y = \ln(x^2 + c), \ c \in \mathbb{R}$

Queremos: EDO

1º Passo: $y' = \frac{2x}{x^2 + c}$

2º Passo: $y = \ln(x^2+c) \Leftrightarrow e^y = x^2 + c$

$$y' = \frac{2x}{x^2+c} \Leftrightarrow y' = \frac{2x}{e^y} \Leftrightarrow \boxed{e^y y' = 2x}$$ EDO pedida

6) PVI $\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1; \ y'(0) = 0 \end{cases}$

1º Passo: Integrar y'' para obter y'

$$y'' + x = 0 \Leftrightarrow y'' = -x \rightarrow y' = \int -x \, dx = \frac{-x^2}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$$

2º Passo: Usar $y'(0) = 0$ para determinar c:

$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{0^2}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \rightarrow y' = \frac{-x^2}{2}$$

3º Passo: Integrar y' para obter y

4º Passo: Usar $y(0) = 0$ para determinar c

T.P.C. solução: $y = \frac{-x^3}{6} + 1$

EDO de variáveis separáveis

7) $y' = \dfrac{2x}{y}$ **Nota:** $y' = \dfrac{dy}{dx}$

1º Passo: Escrever a EDO na forma

$$\boxed{q(y)\,dy = p(x)\,dx}$$

$$y' = \frac{2x}{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = 2x\,dx$$

2º Passo: Integrar ambos os membros:

$$\int y\,dy = \int 2x\,dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

3º Passo: Resolver em ordem a y (se possível e adequado)

$$\Leftrightarrow y^2 = 2(x^2 + c),\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{2(x^2+c)},\ c \in \mathbb{R}}$$

8) $y' = \dfrac{2x}{y}$; $y(1) = 0$

1º Passo, 2º Passo: iguais aos anteriores

$$\frac{y^2}{2} = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$$

3º Passo: Usar a condição extra para determinar o valor de c.

$$\underbrace{y(\underbrace{1}_{x}) = \underbrace{0}_{y}} \Leftrightarrow \frac{0^2}{2} = 1^2 + c \Leftrightarrow \boxed{c = -1}$$

4º Passo: Igual ao 3º Passo do ex. anterior

$$\frac{y^2}{2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2(x^2-1)}$$

9) a) $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$

1º Passo: $(1+x^2)\,dy = -(1+y^2)\,dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2}\,dy = -\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

2º Passo:

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int -\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = -\operatorname{arctg} x + c,\ c \in \mathbb{R}$$

3º Passo: $\Leftrightarrow y = \operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} x + c),\ c \in \mathbb{R}$

b) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 0$

1º Passo: $\dfrac{dy}{dx} \operatorname{sen} x + y \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \operatorname{sen} x = -y \cos x$$

$y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$$

2º Passo: $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

$u = \operatorname{sen} x$

$u' = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|\operatorname{sen} x| + \ln|c|,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ (*)$$

3º Passo: $\Leftrightarrow \ln|y| = \ln\left|\dfrac{c}{\operatorname{sen} x}\right|,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Leftrightarrow |y| = \left|\frac{c}{\operatorname{sen} x}\right|,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c}{\operatorname{sen} x},\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

Se $y = 0$ então $y' = 0$ e $0 \times \operatorname{sen} x + 0 \times \cos x = 0$
$\Leftrightarrow 0 = 0$

ou seja $y = 0$ também é solução da EDO. Então o integral geral é: $y = \dfrac{c}{\operatorname{sen} x},\ c \in \mathbb{R}$

(*) Nota: Usar $\ln|c|,\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ em vez de $c \in \mathbb{R}$ quando todas as parcelas tiverem logaritmos (útil para simplificar)

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$

$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\ln(a^p) = p\ln(a)$

c) $y' \times e^{y-x^2} = 2x + xe^y$

1º Passo:

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \times \frac{e^y}{e^{x^2}} = x(2+e^y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^y}{2+e^y}\, dy = x\, e^{x^2} dx$$

2º Passo: $\displaystyle\int \frac{e^y}{2+e^y}\, dy = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx$

$u = 2+e^y$
$u' = e^y$

$$\Leftrightarrow \ln(2+e^y) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$2+e^y > 0$
(não precisa de módulo)

3º Passo $\Rightarrow$ Facultativo.

10) $(1-x^2)y' - xy = xy^2;\ y(0) = 0.5$

1º Passo: $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + xy$

$$\Leftrightarrow (1-x^2)\frac{dy}{dx} = x(y^2+y)$$

garante $y \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2+y}\, dy = \frac{x}{1-x^2}\, dx$$

2º Passo: $\displaystyle\int \frac{1}{\boxed{y^2+y}}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1-x^2}\, dx$

$\hookrightarrow y(y+1)$

$u = 1-x^2$
$u' = -2x$

$\hookrightarrow$ Integral racional
T.P.C.

$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln|y| - \ln|y+1|} = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

3º Passo: $y(0) = 0.5 \Leftrightarrow \ln\left|\dfrac{0.5}{0.5+1}\right| = -\dfrac{1}{2}\underbrace{\ln|1-0^2|}_{=0} + c \Leftrightarrow \boxed{\ln\left(\frac{1}{3}\right) = c}$

$\hookrightarrow \frac{1}{3}$

4º Passo: $\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = -\dfrac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$